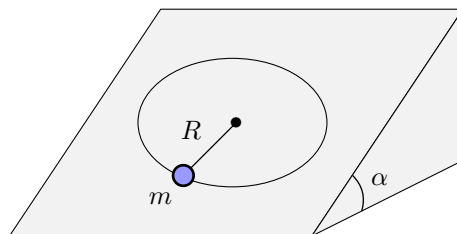


Exercice Pendule incliné

Le pendule incliné est constitué d'un point matériel de masse m astreint à se déplacer sans frottement sur un cercle de rayon R contenu dans un plan incliné. α est l'angle d'inclinaison entre le plan incliné et le plan horizontal.

1. Faire un dessin représentant le pendule, le choix de coordonnées et les forces.
2. Déterminer les équations du mouvement du point matériel.



Solution :

Système et repère :

Le système est la masse m du pendule. On choisit le repère cylindrique (O, e_ρ, e_ϕ, e_z) .

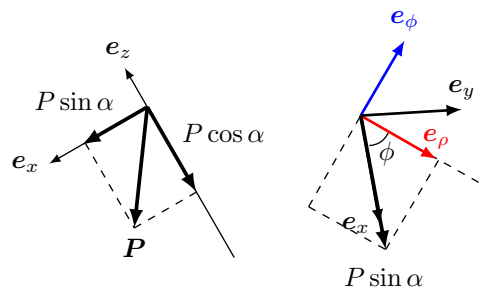
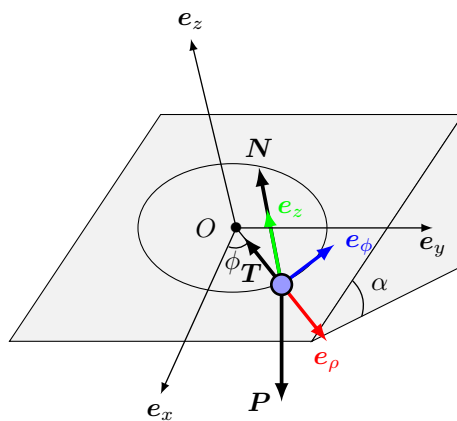
Contraintes :

La masse m est astreinte à se déplacer sur un cercle de rayon fixe R sur le plan incliné. Les contraintes sont donc :

$$\begin{aligned} \rho = R = \text{cste} &\Rightarrow \dot{\rho} = 0 \text{ et } \ddot{\rho} = 0 \\ z = 0 &\Rightarrow \dot{z} = 0 \text{ et } \ddot{z} = 0 \end{aligned}$$

1. *Bilan des forces extérieures :*

- Poids : $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$
 $= mg(\sin \alpha \mathbf{e}_x - \cos \alpha \mathbf{e}_z)$
 $= mg(\sin \alpha (\cos \phi \mathbf{e}_\rho - \sin \phi \mathbf{e}_\phi) - \cos \alpha \mathbf{e}_z)$
- Réaction normale du plan : $\mathbf{N} = N \mathbf{e}_z$
- Tension dans le fil : $\mathbf{T} = -T \mathbf{e}_\rho$



2. *Équation du mouvement :* $\sum \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes du repère cylindrique donne,

Selon e_ρ : $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = mg \sin \alpha \cos \phi - T$

Selon e_ϕ : $m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = -mg \sin \alpha \sin \phi$

Selon e_z : $m\ddot{z} = -mg \cos \alpha + N$

En tenant compte des contraintes, ces équations se réduisent respectivement à,

$$T = mR \left(\dot{\phi}^2 + \frac{g}{R} \sin \alpha \cos \phi \right)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{R} \sin \alpha \sin \phi = 0$$

$$N = mg \cos \alpha$$